# CF 961 G Partitions 解説

KY2001

2021 年 9 月 4 日

https://codeforces.com/contest/961/problem/G

## 1 問題概要

(省いた部分があるため, 詳細は問題ページをご覧下さい)
1 から $n$ の番号が付けられた $n$ 要素の集合が与えられる。$i$ 番の要素の重みは $w_i$ であり, 与えられた集合の部分集合 $S$ の重み $W(S)$ は次式で表される。

$$W(S) = |S| \sum_{i \in S} w_i \tag{1}$$

また, 与えられた集合を $k$ 個の部分集合に分けるような分割 $R$ の重み $W(R)$ は次式で表される。

$$W(R) = \sum_{S \in R} W(S) \tag{2}$$

与えられた集合をちょうど $k$ 個の空でない部分集合に分けるような全ての分割について, その重みの総和を $10^9 + 7$ で割った余りを計算し, 出力せよ。
制約:

$$1 \leq k \leq n \leq 2 \times 10^5 \tag{3}$$
$$1 \leq w_i \leq 10^9 \tag{4}$$

入力: 1 行目に $n$, $k$。2 行目に $w_i$($n$ 個の数)

## 2 解説

### 2.1 上手く行かない例

ある要素 $i$ の寄与 ($|S|w_i$) を考える。$i$ が部分集合 $S$ に含まれるとすると, その重みは $W(S) = |S| \sum_{j \in S} w_j$ である。ここで, $S$ のサイズを $j$ とすると, そのような部分集合の選び方は ${}_{n-1}C_{j-1}$ 通りある (全体から $i$ を抜いた後に残りを選ぶ)。このとき, 残りの $n-j$ 個の要素は $k-1$ 個の部分集合に分ける必要がある。これは $n-j$ 個のボールを区別しない $k-1$ 個の箱にどの箱も空でないように入れる通り数であるから, 第 2 種スターリング数 $S(n-j, k-1)$ で表される。よって, 要素 $i$ の寄与は次式で表される。

$$w_i \cdot \sum_{j=1}^{n-k+1} j \cdot {}_{n-1}C_{j-1} \cdot S(n-j, k-1) \tag{5}$$

ここで, シグマの部分は $i$ に依存しないことから, 答えとなる数字 $ans$ は次式で表される。

$$ans = sum(w_i) \cdot \sum_{j=1}^{n-k+1} j \cdot {}_{n-1}C_{j-1} \cdot S(n-j, k-1) \tag{6}$$

ここで, 第 2 種スターリング数 $S(n,k)$ は $O(k\log n)$ で計算できることから, 上式を愚直に計算すると, おおよそ $O(nk\log n)$ になり, 間に合わない。

### 2.2 正答例

ある要素 $i$ の寄与 $(|S|w_i)$ を考える。部分集合の重み $W(S)=|S|\sum_{j\in S}w_j$ の $|S|$ は集合に含まれる要素の数であるから, $i$ のみの寄与を考えると $n$ 要素の $k$ 個の部分集合への分割全ての $|S|$ に対して常に 1 だけ寄与するので $S(n,k)$ と書ける。また, $i$ 以外の要素 $j$ については, $i$ と $j$ が同じ部分集合に含まれるときのみ寄与する ($w_i$ と乗算される) ので, $i$ と $j$ を 1 要素とみなすことで, $S(n-1,k)$ だけ寄与する。以上より, 答えとなる数字 $ans$ は次式で表される。

$$ans = sum(w_i)\cdot(S(n,k)+(n-1)S(n-1,k)) \tag{7}$$

ここで, 第 2 種スターリング数 $S(n,k)$ は $O(k\log n)$ で計算できることから, 時間制約を満たす。