解説

NOSS

2021 年 9 月 4 日

AGC038 - C LCM

求める解は、$f(x) =$ 数列 A に含まれる x の個数 とおけば、次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N-2}\sum_{j=i+1}^{N-1}\mathrm{lcm}(A_iA_j) &= \left(\sum_{0\le i,j<N}\mathrm{lcm}(A_iA_j) - \sum_{0\le i<N}A_i\right)/2 \\
&= \left(\sum_n n\sum_{\mathrm{lcm}(x,y)=n}f(x)f(y) - \sum_{0\le i<N}A_i\right)/2
\end{aligned}
$$

ここで、$\sum_{\mathrm{lcm}(x,y)=n}f(x)f(y)$ は lcm 畳み込みの形をしており、$f(x)$ の約数系ゼータ変換の点積をメビウス変換することによって計算できる。しかし、今回は lcm の値の取りうる範囲が 10^{12} 程度と非常に大きいため計算できない。

一方、lcm は gcd によって表現できる。

$$
\mathrm{lcm}(x,y) = \frac{xy}{\gcd(x,y)}
$$

したがって、$g(x) =$ 数列 A に含まれる x の総和 とおけば、次のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\le i,j<N}\mathrm{lcm}(A_iA_j) &= \sum_{0\le i,j<N}\frac{A_iA_j}{\gcd(A_i,A_j)} \\
&= \sum_n\frac{1}{n}\sum_{\gcd(A_i,A_j)=n}A_iA_j \\
&= \sum_n\frac{1}{n}\sum_{\gcd(x,y)=n}g(x)g(y)
\end{aligned}
$$

ここで、$\sum_{\gcd(x,y)=n}g(x)g(y)$ は gcd 畳み込みの形をしており、$g(x)$ の倍数系ゼータ変換の点積をメビウス変換することによって計算できる。また、gcd の取りうる範囲は 10^6 程度のため、十分計算できる。

以上より、$\sum_{0\le i,j<N}\mathrm{lcm}(A_iA_j)$ が求められたため、求める解も得られる。計算量は A_i の最大値を M として全体で $O(N+M\log\log M)$ となる。

補足

倍数系ゼータ変換

$$F(n)=\sum_{n|x} f(x)$$

gcd 畳み込み

$$h(n)=\sum_{\gcd(x,y)=n} f(x)g(y)$$

$$h(n)\overset{\text{メビウス}}{\leftarrow} H(n)=F(n)G(n)\overset{\text{ゼータ}}{\leftarrow} f(n),g(n)$$