包除原理

Rogi

1　包除原理

有限集合 S の部分集合 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ が与えられたとき、その要素数に関して

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

$$\left| \bigcup_{k=1}^{N} A_i \right| = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{J \subseteq V, |J|=k} \left| \bigcap_{j \in J} A_i \right|$$

ただし、$V = \{1, 2, \cdots, N\}$ とした。
これを **包除原理** (Inclusion-Exclusion Principle, PIE) という。

$N = 2$ のとき

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$N = 3$ のとき

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

(ベン図を書く)

ド・モルガン則から、

$$\left| \bigcup_{k=1}^{N} \bar{A}_i \right| = |S| - \left| \bigcup_{k=1}^{N} A_i \right|$$

も成り立つ。

モジュラ関数 $f : 2^S \to \mathbb{R}$ に拡張される。

$$f\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N\right) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{J \subseteq V, |J|=k} f\left(\bigcap_{j \in J} A_i\right)$$

$f(A) = |A|$ とすれば基本形になる。

f が劣モジュラであるとは、$\forall A, B (\subseteq S)$ に対して

$$f(A) + f(B) \leq f(A \cup B) + f(A \cap B)$$

が成り立つときをいう。

例えば、$S = 1, 2, \cdots, N$ の各要素に重み w_i が与えられたとき

$$f(A) = \max_{i \in A} w_i$$

は劣モジュラである。

また、f が加法的であるとは、$A \cap B = \emptyset$ である任意の $A, B (\subseteq S)$ に対して

$$f(A) + f(B) = f(A \cup B)$$

が成り立つことをいう。

$$f \text{ が加法的} \iff f \text{ がモジュラ、かつ、} f(\emptyset) = 0$$

[包除原理とモジュラ関数 室田一雄]

`http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~murota/lect-kisosuri`
`/modularfunc081022.pdf`

2 証明

2.1 二項定理

集合 m 個の共通部分の寄与を考える。項 $k = 1, 2, 3,$ のとき...

$$k \equiv 0 \mod 2 \quad \to \quad +\binom{m}{k}$$
$$k \equiv 1 \mod 2 \quad \to \quad -\binom{m}{k}$$

よって合計で

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k} = 1?$$

これは

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k$$

において、$x = -1$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} \\ 0 &= 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} \\ 0 &= 1 - \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k} \\ \therefore \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k} &= 1 \end{aligned}$$

2.2 数学的帰納法

高校数学の美しい物語

https://manabitimes.jp/math/611

3　撹乱順列

3.1　問題

1 から N までの整数を並び替えてできる順列 $P = (P_1, P_2, \cdots, P_N)$ のうち、次の条件を満たす順列の個数 a_N を求めよ。

$$P_i \neq i \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$$

3.2　解答

A_i を i が移動しない順列の集合とすると、

$$a_N = |\bar{A_1} \cap \bar{A_2} \cap \cdots \cap \bar{A_N}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N|$$

k 個の要素が移動しない順列の個数は $(N-k)!$ であるから、

$$\begin{aligned} a_N &= N! - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \sum_{J \subseteq V, |J|=k} \left| \bigcap_{j \in J} A_i \right| \\ &= N! - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \binom{N}{k} (N-k)! \\ &= N! - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{N!}{k!(N-k)!} (N-k)! \\ &= N! \left(1 - \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \right) \\ &= N! \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

$N \to \infty$ のとき

$$\frac{a_N}{N!} \ \to \ \frac{1}{e} \ \approx \ 0.367$$

3.3　考察

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\sum_{J\subseteq V,|J|=k}\left|\bigcap_{j\in J}A_i\right| = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\binom{N}{k}(N-k)!$$

k 個の集合の重なりについて $f(k)$ がわかっているとすると、

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\sum_{J\subseteq V,|J|=k}\left|\bigcap_{j\in J}A_i\right| = \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}\binom{N}{k}f(k)$$

基本形を **状態系包除原理**、個数に注目したものを **個数系包除原理**と呼ぶ。
$O(2^N)$ が、$O(N)$ になる。

4　約数・倍数

基本形の包除に「似た」考え方をする **約数系包除原理** がある。

4.1　説明

ちょうど k となるものを求めるのは難しいが、k の倍数・約数になるものであれば求めるのが簡単であるときに使える。
あるパラメータが k の倍数である場合

$$f(k) = (\text{何らかの計算}) - \sum_{k|i, k \neq i} f(i)$$

- $f(k)$ が確定する時に重複して数えている k の倍数について引く
- k の大きい順に計算する
- 計算量は $O(N \log N)$

あるパラメータが k の約数である場合

$$f(k) = (\text{何らかの計算}) - \sum_{i|k, i \neq k} f(i)$$

- $f(k)$ が確定する時に重複して数えている k の約数について引く
- k の小さい順に計算する
- 計算量は $O(Nd(N))$。ただし $d(N)$ は N の約数の個数。

4.2　問題

1 以上 N 以下の整数のうち、N と互いに素であるものの個数 $\phi(N)$ を求めよ。

4.3　解答

$$N = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e^k}$$

と素因数分解できる場合、$p_1, p_2, \cdots, p_k$ のいずれの倍数でもないものの個数を求めればよい。

状態系包除原理を適用する。A_i を p_i の倍数とすると

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k|$$

として解くことができる。

約数系包除原理を適用することを考える。

$$f(n) = |\{\gcd(x, N) = n \mid 1 \leq x \leq N\}|$$

とすると、求めるのは $f(1)$ である。
N との最大公約数がちょうど n になるものの個数 $(f(n))$ を求めることは困難であるが、
N との最大公約数が n の倍数になるものの個数を求めることは容易。

$$f(n) = \frac{N}{n} - f(2n) - f(3n) - \cdots$$

より、これを上から計算していけば良い。明快な表示として

$$\phi(N) = f(1) = \sum_{n|N} \mu(n) \frac{N}{n}$$

とできる。ただし

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ が 1 以外の平方数で割り切れる} \\ +1 & n \text{ が相異なる偶数個の素数の積} \\ -1 & n \text{ が相異なる奇数個の素数の積} \end{cases}$$

最後に、

$$\phi(N) = N \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

5　包除 + 動的計画法

遷移に dp が絡んだり、dp で計算した後で包除を使ったり、様々。
幅が広い上に高難易度 (ARC E,F や AGC D,E)
発想の元になっているのは包除原理。
書くことが大事？

包除原理についてとても詳しいスライド。練習問題も多く掲載されている。
`https://compro.tsutaj.com//archive/181015_incexc.pdf`

6　問題を解く

6.1

1 以上 N 以下の整数で、3 つの整数 a, b, c のいずれかの倍数になるものの個数を求めよ。

$$1 \leq N \leq 10^9, \quad 1 \leq a, b, c \leq 10^4$$

$$\{N, a, b, c\} = \{100, 2, 3, 5\} \quad \text{then} \quad 74$$

$$\{N, a, b, c\} = \{100, 2, 5, 6\} \quad \text{then} \quad 60$$

$$\{N, a, b, c\} = \{83359640, 3304, 9805, 9945\} \quad \text{then} \quad 42104$$

6.2

$H \times W$ のグリッドがある。
各マスには、A, B のどちらかがあるか、何もないかのいずれかである。

- A または B のある最も上の行のすぐ上
- A または B のある最も下の行のすぐ下
- A または B のある最も左の列のすぐ左
- A または B のある最も右の列のすぐ右

の 4 辺でマスを囲んだところ、$X \times Y$ の区画になった。
初めグリッドには a 個の A と、b 個の B があったとすると、その配置は何通りあるか。
$10^9 + 7$ で割った余りを求めよ。

$$1 \leq H, W \leq 10^5$$
$$1 \leq X \leq H, \quad 1 \leq Y \leq W$$
$$a, b \geq 0, \quad 1 \leq a + b \leq X + Y$$

部分点：$a + b = X + Y$ が制約に課される。

$$H = 3,\ W = 2,\ X = Y = 2,\ a = b = 2 \quad \text{then} \quad 60$$

6.3

N 人のプログラマーと M 個の問題がある。以下の条件を満たすように担当を決めた時、その決め方は何通りか。$\pmod{10^9+7}$

- 全てのプログラマーは、1 つだけ問題に取り組む
- 全ての問題は 1 人以上のプログラマーによって取り組まれる。

$$N = M = 3 \quad \text{then} \quad 6$$

6.4

L 以上 R 以下の正の整数であって、$C_1, C_2, \cdots, C_N$ のうち、1 つの数のみで割り切れる数の個数を求めよ。

$$
\begin{aligned}
&1 \leq N \leq 10 \\
&1 \leq L \leq R \leq 10^9 \\
&\forall i \ (1 \leq i, j \leq N) \quad 1 \leq C_i \leq 10^9 \\
&\forall i, j \ (1 \leq i, j \leq N) \quad C_i \neq C_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&N = 2,\ [L, R] = [1, 10] \\
&C_1 = 2,\ C_2 = 3 \qquad \text{then} \quad 6
\end{aligned}
$$

6.5

N 個の相異なる整数 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ と整数 M が与えられる。1 以上 M 以下のそれぞれの整数 k について、$a_1, a_2, \cdots, a_N$ のうち互いに素であるものの個数を求めよ。

$$\begin{aligned}
&1 \leq N, M \leq 10^5 \\
&\forall i \ (1 \leq i \leq N) 1 \leq a_i \leq 10^5 \\
&\forall i, j \ (1 \leq i, j \leq N) \quad a_i \neq a_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&N = 4, \ M = 3 \\
&a = [6, 7, 8, 9] \qquad \text{then} \quad 4, 2, 2
\end{aligned}$$

6.6

以下の条件を満たす、n 個の区別できるボールを k 個の区別できる箱に入れる方法は何通りあるか。

- どのボールも、必ずいずれかの箱に入れる
- どの箱にも 1 つ以上のボールを入れる

$$1 \leq n, k \leq 10^3$$

6.7

長さ N の順列 $a_1, a_2, \cdots, a_N$ が、一部穴あきの状態で与えられる。順列内の穴を埋めたとき、撹乱順列になるものは何通りか。

$$2 \le N \le 2000$$

$$N = 5,\ a = [e, e, 4, 3, e] \quad \text{then} 2$$

6.8

正整数 N, K が与えられる。1 以上 N 以下の全ての整数 i について $\mathrm{lcm}(i, K)$ を求め、その合計を求めよ。

$$1 \le N, K \le 10^9$$

$$N = 4,\ K = 2 \quad \mathrm{then} 14$$

6.9

長さが N、各要素が 1 以上 K 以下で、数列全体が回文であるような数列 A に対して、次の操作を好きなだけ繰り返す。

- A の先頭要素を末尾へ移動

最終的な数列として考えられるものの個数を求めよ。

$$1 \leq N, K \leq 10^9$$

$$N = 4,\ K = 2 \quad \text{then} 6$$

6.10

K 種類の色の花びらがあり、色 i の花びらは C_i 枚ある。この花びら全てを円形に並べて花を作ることを考える。作れる花は何通りあるか。
ただし、回転することで一致するものは同じ花とみなすが、上下をひっくり返して一致する場合は、回転で一致しないのであれば違う花であるとみなす。

$$1 \leq K \leq 10^5$$
$$\sum_{i=1}^{K} C_i \leq 10^6$$
$$\forall i \ (1 \leq i \leq K) \quad C_i \geq 1$$

$$K = 2,\ C = [2, 2] \quad \text{then} 2$$

6.11

以下の条件を全て満たすような N 個の整数からなる数列は何通りあるか。

- 条件 i： $a_{l_i}, a_{l_i+1}, \cdots, a_{r_i}$ の中に、b_i と異なるものが少なくとも 1 つ存在する。$(1 \leq i \leq M)$
- すべての要素の値は 1 以上 S 以下

$$1 \leq N, M, S \leq 2 \times 10^5$$