写像 12 相

KY2001

2021 年 7 月 22 日

1　数学的準備

1.1　関係

ある集合 X について, 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \sim y$ が成り立つかどうかが定まるとき, 記号 $\sim$ を X 上の (二項) **関係**という。

1.2　同値関係

関係 $\sim$ が以下の 3 つの性質を満たすとする。このとき, 関係 $\sim$ は X 上の**同値関係**であるという。

1. 反射律: 任意の $x \in X$ で $x \sim x$
2. 対称律: 任意の $x, y \in X$ で $x \in y \Rightarrow y \sim x$
3. 推移律: 任意の $x, y, x \in X$ で $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$

1.3　同値類

ある関係 $\sim$ が集合 X 上の同値関係であるとき, 各 $x \in X$ について, $\{y \in x | x \sim y\}$ を x の**同値類**という。集合 X は同値類により分割される。

1.4　単射

写像 $f : A \to B$ が次の条件を満たすとき, f は単射であるという。(違うものは違う先~~は~~へ写る)

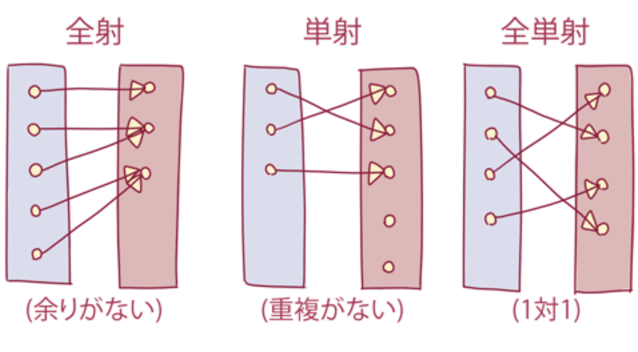
$$\forall a_1, a_2 \in A, (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$$

1.5　全射

写像 $f : A \to B$ が次の条件を満たすとき, f は単射であるという。(終域全てに写る)

$$\forall b_i \in B, \exists a_j \in A : \cancel{y = f(x)}$$

$b_i = f(a_i)$



2　写像 12 相とは

ある有限集合 N, X についての写像 $f : N \to X$ の同値類の数え上げを考える。
このとき, 写像 $f : N \to X$ は次のように分類できる。

1. 条件無し
2. f は単射である
3. f は全射である

また, 関数 f について 4 つの異なる同値関係が定義できる。

1. 等しい
2. N の置換による差異を除いて等しい
3. X の置換による差異を除いて等しい
4. N および X の置換による差異を除いて等しい

以上の条件により, 写像 $f : N \to X$ の同値類の数え上げの問題は $3 \times 4 = 12$ 通りに分けられる。これを**写像 12 相**という。

3　写像 12 相の言い換え

写像 $f : N \to X$ の同値類の数え上げは n 個のボールを k 個の箱に入れる場合の数を数える問題に言い換える事ができる。すなわち, 集合 N をボール, X を箱として考えると写像の分類は次のように言い換えられる。

写像 $f : N \to X$	ボールと箱
条件無し	条件無し
f は単射である	全ての箱の中身が 1 つ以下
f は全射である	全ての箱の中身が 1 つ以上

同様に, f の同値関係についても

写像 $f : N \to X$	ボールと箱
等しい	ボールと箱を区別する
N の置換による差異を除いて等しい	ボールを区別しない
X の置換による差異を除いて等しい	箱を区別しない
N および X の置換による差異を除いて等しい	ボールと箱を区別しない

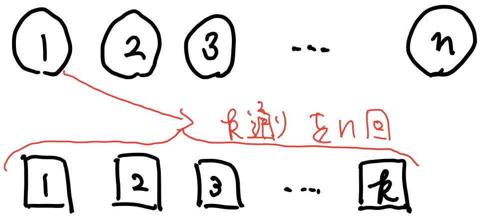
以上の問題設定の元, 次の表を埋めていく。

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	?	?	?
区別しない	区別する	?	?	?
区別する	区別しない	?	?	?
区別しない	区別しない	?	?	?

3.1 ボールと箱をどちらも区別するとき，n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。

区別する＝ボールと箱に $1 \sim n, 1 \sim k$ という番号が付いていると考えるとイメージしやすいかもしれません。

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	今	?	?
区別しない	区別する	?	?	?
区別する	区別しない	?	?	?
区別しない	区別しない	?	?	?



$\to k \times k \times \cdots$

$= k^n$

3.2 **ボールと箱をどちらも区別してかつ, すべての箱の中身が 1 つ以下になるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。ただし, $k \geq n$ とする。($k \geq n$ の場合のみ, 単射が存在する)**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	今	?
区別しない	区別する	?	?	?
区別する	区別しない	?	?	?
区別しない	区別しない	?	?	?

$$\text{(1)} \quad \text{(2)} \quad \text{(3)} \quad \cdots \quad (n)$$

$$k \quad k-1 \quad \cdots \quad k-n+1$$

$(k \geq n)$

$$\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \cdots \quad \boxed{k}$$

$$\text{ans} = \frac{k!}{(k-n)!} = {}_kP_n$$

3.3 **箱のみ区別してかつ，すべての箱の中身が 1 つ以下になるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。ただし，$k \geq n$ とする。($k \geq n$ の場合のみ，単射が存在する)**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	?
区別しない	区別する	?	?	?
区別する	区別しない	?	?	?
区別しない	区別しない	?	?	?

○ .... ○　　　$(k \geq n)$

$\boxed{1}$ --- $\boxed{k}$

k個のうち n個にボールが1つ入っている

$\to {}_kC_n$

3.4 **ボールのみ区別してかつ，すべての箱の中身が 1 つ以下になるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。ただし，$k \geq n$ とする。($k \geq n$ の場合のみ，単射が存在する)**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	?
区別しない	区別する	?	${}_kC_n$	?
区別する	区別しない	?	今	?
区別しない	区別しない	?	?	?

① ② $\cdots$ n

($k \geq n$, 1つ以下)

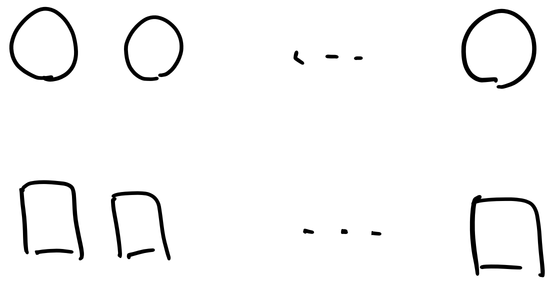
□ □ $\cdots$ □

[①] [②] $\cdots$ [n] $\cdots$ □

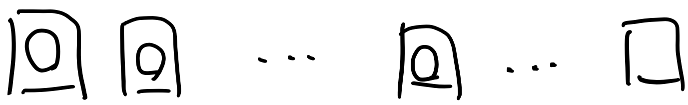
1通り

3.5 **どちらも区別せず，すべての箱の中身が 1 つ以下になるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。ただし，$k \geq n$ とする。($k \geq n$ の場合のみ，単射が存在する)**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	?
区別しない	区別する	?	${}_kC_n$	?
区別する	区別しない	?	1	?
区別しない	区別しない	?	今	?



$(k \geq n$, 1以下)



$\rightarrow$ 1通り

3.6　箱のみ区別するとき, n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	?
区別しない	区別する	今	${}_kC_n$	?
区別する	区別しない	?	1	?
区別しない	区別しない	?	1	?

$\sum_{i=1}^{k} a_i = n$ を満たす数列 $\{a_i\}$ の数え上げ

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{n}\ \underbrace{||\cdots|}_{k-1}$$

$$ans = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = {}_{n+k-1}C_{n}$$

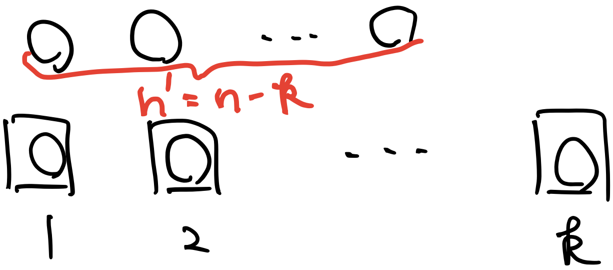
$$= {}_{n+k-1}C_{k-1}$$

3.7 **箱のみ区別して，全ての箱の中身が 1 つ以上になるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。ただし，$n \geq k$ とする。**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	?
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	今
区別する	区別しない	?	1	?
区別しない	区別しない	?	1	?

(n≥k, 1つ以上)

(i) 先に箱に1つ以上入れておくと条件無しに帰着



$$ans = {}_{n'+k-1}C_{n'}$$

$$= {}_{n-1}C_{n-k}$$

$$= {}_{n-1}C_{k-1}$$

+計算量

3.8 **どちらも区別して, 全ての箱の中身が 1 つ以上になるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。ただし, $n \geq k$ とする。**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	今
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	${}_{n-1}C_{k-1}$
区別する	区別しない	?	1	?
区別しない	区別しない	?	1	?

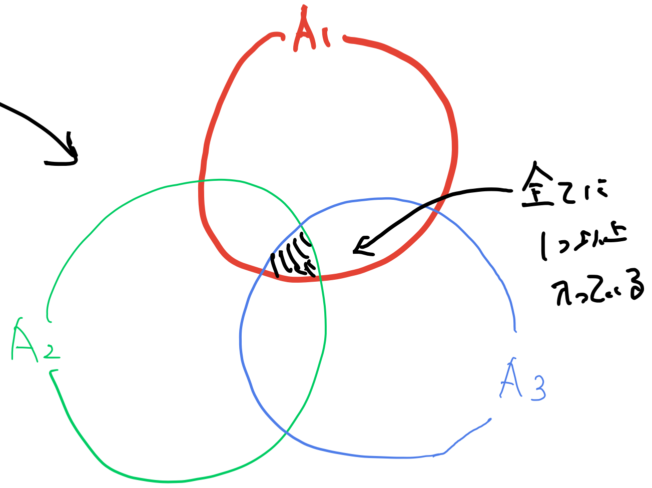
① ② … ⓝ

$(n \geq k,\ 1つ以上)$

$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \cdots\ \boxed{k}$

(i) $k=3$ の場合

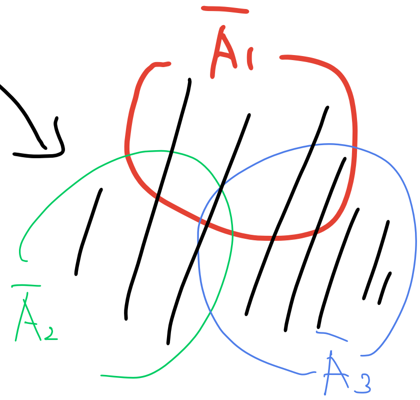
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ (A_i = iに1つ以上入っている)



$= \underbrace{全体}_{k^n} - |\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}|$

$= 全体 - |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3|$

$= 全体 - \{|\bar{A}_1| + |\bar{A}_2| + |\bar{A}_3| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3| - |\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| + |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|\}$



A_1に1つも入ってない

$|\bar{A}_1| = (k-1)^n$

$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = (k-2)^n$

(ii)

$ans = k^n - |\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 \cdots \bar{A}_k|$

$= k^n - \{k \times (k-1)^n - {}_kC_2 (k-2)^n \cdots (-1)^k {}_kC_{k-1} 1^n\}$

$= k^n - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i+1} {}_kC_i (k-i)^n$

↓ $i' = k-i$

$= k^n - \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i+1} {}_kC_i\, i^n$

吸収する

$O(k \log n)$

i^n

$= \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} {}_kC_i\, i^n$ ← 全射（になるような写像）の個数と呼ばれる。

↑計算量

3.9　**ボールのみ区別して，全ての箱の中身が 1 つ以上となるように n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	$\sum(-1)^{k-i}\ {}_kC_i i^n$
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	${}_{n-1}C_{k-1}$
区別する	区別しない	?	1	今
区別しない	区別しない	?	1	?

① ② ⋯ ⓝ

□ □ ⋯ □

$(n \geq k$, 1つ以上$)$

→ 前節の箱の区別がなくなったものなので

$$\text{ans} = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\,{}_kC_i\, i^n \to O(k\log n)$$

$$= S(n,k) \to (\text{第2種スターリング数})$$

@ スターリング数 $S(n,k)$ の性質①

任意の $k \geq 2$, $n \geq k+1$ に対して

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

[証明]

(i) ボール1のみが入る箱があるとき,

残りの $n-1$ 個を $k-1$ 個の箱に入れる $\to S(n-1,k-1)$

(ii) ボール1が他のボールと一緒になるとき,

$n-1$ 個を k 個の箱に入れた後，どれかの箱に1を入れればよいので

$$\to kS(n-1,k)$$

以上より, $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$

@ スターリング数 $S(n,k)$ の性質②

任意の自然数 n について

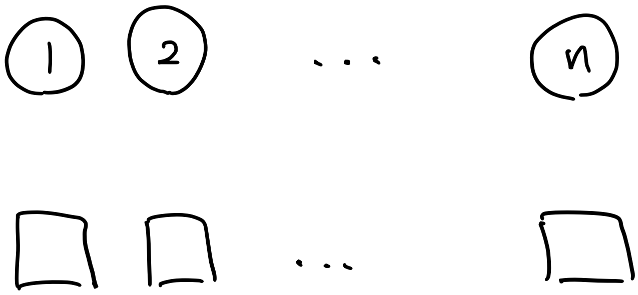
$$S(n,n) = S(n,1) = 1$$

→ 漸化式的に $O(nk)$ で求めることもできる。

+計算量

3.10　**ボールのみ区別して, n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。**

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	$\sum(-1)^{k-i}\ {}_kC_i i^n$
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	${}_{n-1}C_{k-1}$
区別する	区別しない	今	1	$S(n,k)$
区別しない	区別しない	?	1	?



(条件無し)

前節の「全ての箱に1つ以上」という条件が消えたものなので
入っている箱の数をiとして

$$ans = \sum_{j=1}^{k} S(n, j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} {}_jC_i \times (i)^n$$

$$= B(n, k) \rightarrow \text{ベル数}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{j-i}}{\cancel{j!}} \times \frac{\cancel{j!}}{(j-i)!\, i!} \times i^n$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{j-i}}{i!\,(j-i)!} i^n = \sum_{1 \le i \le j \le k}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i}^{k} \frac{(-1)^{j-i}}{i!\,(j-i)!} i^n$$

ここで $j' = j - i$ とすると

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{k-i} \frac{(-1)^j}{i!\, j!} i^n$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{k}}_{k} \frac{\overset{\log n}{i^n}}{i!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k-i} \frac{(-1)^j}{j!}}_{\text{前計算 } O(k)} \rightarrow O(k \log k)$$

@ベル数

B(n,n)をB(n)のように表すことがあり、
これは「n個の区別されたものの分割の個数」を表す。

(こちらが一般的な定義のようです、日英wikipediaもこれでした)

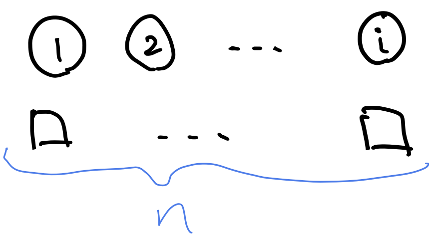
@ベル数の漸化式

整数nについて次式が成り立つ。

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \, B(i)$$

[証明]

ボール(n+1)と同じ箱に入らないボールの個数をiとすると、
ボールの選び方は ${}_nC_i$ で



$\rightarrow B(i,n) = B(i)\ (n \geq i)$

以上より

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i \, B(i) \rightarrow O(n^2)$$

条件無し

3.11 **どちらも区別せず, ~~全ての箱の中身が 1 つ以上となるように~~ n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数~~はどのようになるか。~~**

を求める計算量を求めよ.

$(n \geq k)$

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	$\sum(-1)^{k-i}\ {}_kC_i i^n$
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	${}_{n-1}C_{k-1}$
区別する	区別しない	$B(n,k)$	1	$S(n,k)$
区別しない	区別しない	今	1	?

n: ○ ⋯ ○ $(n \geq k)$

k: □ ⋯ □

a_1 ⋯ a_k

$\sum_{i=1}^{k} a_i = n \quad (a_i \geq 0,\ a_{i+1} \geq a_i)$

→ nを0以上の整数の和で表す問題に帰着.

◎ 分割数の漸化式

ans $= P(n, k)$ とすると 次が成り立つ.

$$P(n, k) = P(n, k-1) + P(n-k, k)$$

[証明]

(i) a_i に0を含むとき, 0を1つ取り除いた

$P(n, k-1)$

(ii) a_i に0を含まないとき, 全ての $a_i \geq 1$ より 全ての a_i から1を引くと,

$n \to n-k$ となり,

$P(n-k, k)$

以上より

$$P(n, k) = P(n, k-1) + P(n-k, k)$$

→ $O(nk)$

※ ここでは nを0以上の整数の和で表す場合の数としたが, 1以上の整数の和で表す場合の数を $P(n, k)$ とする場合もある.

その場合は

$P'(n, k) = P(n-k, k)$ と考えれば同じ.

3.12　どちらも区別せず, n 個のボールを k 個の箱にいれる場合の数はどのようになるか。

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	$\sum(-1)^{k-i}\ {}_kC_i i^n$
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	${}_{n-1}C_{k-1}$
区別する	区別しない	$B(n,k)$	1	$S(n,k)$
区別しない	区別しない	$P(n,k)$	1	今

先の議論より

$$ans = P(n \cdot k,\ k) \rightarrow O(nk)$$

4　完成形

n 個のボール	k 個の箱	条件無し	全ての箱の中身が 1 つ以下	全ての箱の中身が 1 つ以上
区別する	区別する	k^n	${}_kP_n$	$\sum(-1)^{k-i}\ {}_kC_i i^n$
区別しない	区別する	${}_{n+k-1}C_n$	${}_kC_n$	${}_{n-1}C_{k-1}$
区別する	区別しない	$B(n,k)$	1	$S(n,k)$
区別しない	区別しない	$P(n+k,k)$	1	$P(n,k)$

5　問題

5.1　みんなで旅行

N 組の夫婦, 計 $2N$ 人がいる。
それぞれのグループに少なくとも 1 組の夫婦が含まれるようなグループの分け方は何通りあるか。

$$1 \leq N \leq 555$$

`https://yukicoder.me/problems/no/140`

グループの数をk，ペアのまま場合分けされる夫婦の数をmとすると

$(m \geq k)$

$$
\begin{array}{cccc}
① & ② & \cdots & ⓜ \\
 & & \big\downarrow f & \\
\square & \square & \cdots & \square
\end{array}
\Big\}\, k
$$

$$
\longrightarrow \underbrace{{}_N C_m}_{\text{夫婦の選び方}} \times \underbrace{S(m,k)}_{\text{グループへの写像の数}} \times \underbrace{\{k(k-1)\}^{N-m}}_{\text{残り}N-m\text{ペアをバラバラに}k\text{グループに分ける方法}} \longrightarrow O(N^2)
$$

5.2 Everything on it

N 種類のトッピングが存在するラーメンがある。すなわち, 2^N 通りのトッピングの組合せが存在する。次の 2 つの条件を満たすようなラーメンの組合せの数を答えよ。

1. 同じラーメンは 1 つまで。
2. N 種類のトッピングそれぞれが, 2 杯以上のラーメンに乗っている。

$$2 \leq N \leq 3000$$

https://atcoder.jp/contests/arc096/tasks/arc096_c

@ i種目のトッピングが2杯以上のラーメンにのっている → A_i

N種だと
→ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_N|$

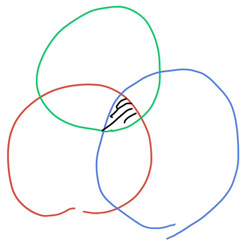
包除
$= \text{全体} - |\overline{A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_N}|$

$= \text{全体} - |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cdots \cup \overline{A_N}|$

$= \underbrace{\text{全体}}_{2^{2^N}} - \left\{ \sum|\overline{A_i}| - \sum|\overline{A_i} \cap \overline{A_j}| + \sum|\overline{A_i} \cap \overline{A_j} \cap \overline{A_k}| \cdots \right\}$

$\overline{A_i}$ = i種のトッピングが0 or 1杯のラーメンにのっている。

以下 $\sum|\overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cap \cdots \overline{A_{i_n}}|$ を求めることを考える。



$n \le N$ 種のトッピングについて $\overline{A_i}$ を満たすとする。 $({}_N C_n)$

また、ラーメンの数をkとすると、

(i) 全トッピングを1杯のラーメンにのせるとき

①　…　ⓝ

□　…　□ } k → $S(n, k)$

(ii) のせないトッピングがあるとき、

①　…　ⓝ

□　…　□ □ } $k+1$ → $S(n, k+1) \times (k+1)$

($k+1$に分けた後、1つ消す。
$k=n$のときは 1.)

以上より

$\sum|\overline{A_{i_1}} \cap \overline{A_{i_2}} \cdots \cap \overline{A_{i_n}}|$

$= \sum_{k=1}^{n} \{S(n,k) + (k+1)S(n,k+1)\} \times \underbrace{\{2^k\}^{N-n}}_{\text{それ以外のトッピングをのせるかどうか}} \times \underbrace{2^{2^{N-n}}}_{\text{それ以外のトッピングによるラーメン}(2^{N-n}\text{種})\text{を組合せに加えるか否か}}$

→ 実装